MSG830 Statistisk analys och experimentplanering

Tentamen 16 April 2015, 8:30 - 12:30
Examinator: Staffan Nilsson, telefon 073 5599 736, kommer till tentamenslokalen 9:30 och 11:30
Tillåtna hjälpmedel: Valfri kalkylator
Antal poäng totalt: 30. För betyget godkänd krävs minst 12 poäng, för väl godkänd 22 poäng

1. På sin väg hem passerar Suzanne två trafikljus, A och B. Risken att hon får rött ljus vid A är 40% och samma risk gäller vid B. Chansen att passera båda utan rött ljus är 22%. Vad är risken att hon behöver stanna för rött ljus vid B om hon redan har stannat för rött ljus vid A?

(4p)

2. Du är medlem i en konstklubb med 21 medlemmar där varje medlem köper en tavla värd 1000 kronor. Vid vårfesten lottas dessa tavlor ut en och en. Varje medlem har samma chans på varje tavla, utom på sin egen som man inte kan vinna alls.

   (a) Vilken fördelning har det antal tavlor som du vinner? Ange både namnet på fördelningen och storleken på parametrarna.

   (b) Vad är chansen att vinna *mer* än en tavla?

   (c) Antalet medlemmar som får en tavla är en stokastisk variabel Y som kan skrivas som $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{21}$, där $Y_i = 1$ om man vinner något och 0 annars. Utnyttja detta för att bestämma väntevärdet för antalet medlemmar som vinner *någon* tavla.

(4p)

3. Vid en rättspsykiatrisk klinik i Småland genomförde man ett försök där de intagna fick en intervention som bestod i 15 lektioner a 45 minuter av specialanpassad lästräning. Nedan visas resultaten från ett test som kallas ordkedja (höga värden är bra) för 11 kvinnor med svenskt modersmål.

Patientnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Före intervention	33	38	47	49	44	46	37	36	41	41	39
Efter intervention	38	42	49	59	51	52	41	39	43	48	44

Testa om det skett en signifikant *förbättring*. Använd signifikansnivå 0.05. (4p)

4. Regnvattenprover från olika orter på Nya Zeeland med avseende på bland annat svavelhalt. Orterna klassificerades i öst och väst. Deskriptiva data från SPSS visas i figuren nedan.

Group Statistics

	Kust	N	Mean	Std. Deviation
Svavelkoncentration	Öst	15	,33	,22
	Väst	20	,43	,31

   (a) Ange ett 95% konfidensintervall för skillnaden i svavelkoncentration mellan öst och väst.

   (b) Bestäm om skillnaden är signifikant på signifikansnivå 0.05.

(4p)

5. Man använder ANOVA när man har en normalfördelad variabel vars medelvärde man vill jämföra mellan tre eller fler grupper. Det F−test som används säger dock inget om vari skillnaderna ligger, utan det får man undersöka med ett post-hoc test. Vi har tittat på två sådana test, Tukey och Dunnet, som tar hänsyn till det som kallas multipelinferens.

   (a) Anta att vi har 5 grupper. Hur många parvisa jämförelser görs då med Tukey respektive med Dunnet.

   (b) Vilken av dessa två ger lägst p-värde för jämförelser som görs av båda?

   (c) Beskriv en situation där det är lämpligt med Dunnet.

(3p)

6. I en amerikansk studie från 70−talet undersökte man utfallet av villkorlig frigivning hos 80 dömda mördare. Mördarna var klassificerade utifrån om mordet var överlagt eller impulsivt. Undersök på signifikansnivå 0.05 om det finns något samband mellan typ av mord och utfallet av villkorlig frigivning.

Mordtyp * Utfall Crosstabulation

Count

		Utfall		Total
		Misslyckat	Lyckat	
Mordtyp	Impulsivt	28	12	40
	Överlagt	18	22	40
Total		46	34	80

(4p)

7. (a) I en enkel linjär regressionanalys angavs den starkt signifikanta lutningen till -0.3 och förklaringsgraden till 51.84%. Vad var korrelationen (r)?

   (b) När man ska analysera ett samband mellan en numerisk variabel X och en annan variabel Y kan man använda sig av den linjära regressionsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ eller $X = \beta_0 + \beta_1 Y$. Vilken/Vilka av följande påstående är sanna?

      i. Signifikansen för lutningen blir samma oavsett modell.
      ii. Regressionslinjen blir samma oavsett modell
      iii. Förklaringsgraden blir samma oavsett modell

   (c) En tidigare studie av sambandet mellan ett kognitivt index, RAKI, och ålder hade funnit ett signifikant samband mellan ålder och RAKI på 1.42 enheter per år. Vi försökte replikera detta och fann följande icke signifikanta samband. Finns det skäl att ifrågasätta den tidigare studien? Motivera ditt svar.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95,0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	77,445	15,126		5,120	,000	47,617	107,273
	age	1,384	,917	,107	1,509	,133	-,424	3,193

a. Dependent Variable: RAKI

(3p)

8. Man vill testa om en normalfördelad variabel X har ett väntevärde som är $\mu = 100$, mot alternativhypotesen att det är större ($\mu > 100$). Standardavvikelsen σ är känd och med stickprovsstorlek $n = 25$ kan man förkasta H_0 på signifikansnivå 0.05 om $\bar{X} > 110$.

   (a) Bestäm σ genom att utveckla

$$P(\bar{X} > 110) = \cdots = 0.05$$

   under antagandet att $\mu = 100$.

   (b) Vad behöver $\bar{X}$ vara för att vi ska kunna förkasta H_0 om vi har ett större stickprov $n = 100$ men fortfarande signifikansnivå $\alpha = 0.05$?

(4p)

Formler och tabeller till kursen MSG830

Deskriptiva mått För ett datamängd $x_1, \cdots, x_n$ definieras

medelvärde

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

standardavvikelse

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

standardfelet (SEM)

$$\mathrm{SEM} = s/\sqrt{n}$$

Sannolikheter

För två händelser A och B är gäller

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Betingade sannolikheter

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Lagen om total sannolikhet

Om utfallsrummet indelas i disjunkta händelser $A_1, \cdots, A_k$, vars union är hela utfallsrummet, så gäller för varje händelse B

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)$$

Om $P(A|B) = P(A)$ säges A och B vara oberoende. Detta medför också att A och B är oberoende om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Stokastiska variabler En diskret stokastisk variabel X kan anta ett ändigt (eller uppräkneligt) antal värden. Sannolikeheten för varje värde bestäms av en sannolikhetsfunktion p

$$p(x) = P(X = x)$$

Väntevärdet av en diskret stokastisk variabel är

$$\mu = E[X] = \sum_{x} xp(x)$$

och variansen är

$$\sigma^2 = V[X] = \sum_x (x-\mu)^2 p(x) = E[X^2] - \mu^2$$

Kontinuerliga stokastiska variabler beskrivs med en täthetsfunktion $f(x) \geq 0$ för alla x och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

För en kontinuerlig stokastisk variabel X är $P(X = x) = 0$ för varje x, men

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)$$

X och Y är oberoende (dvs $P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$ för alla x, y

Regler för väntevärden och varians

Om a, b är konstanter och X, Y är stokastiska variabler gäller

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$
$$E[a+bX] = a + bE[X]$$
$$V[a+bX] = b^2 V[X]$$

om dessutom X och Y är oberoende så gäller

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

och

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y]$$

Binomialfördelning $S \sim bin(n,p)$

$$P(S=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ för } k = 1, 2, \cdots, n$$

$$E[S] = np, V[S] = np(1-p)$$

Normalfördelning $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}$$

$$E[X] = \mu, V[X] = \sigma^2$$

Fördelningen med $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ kallas standard (el standardiserad) normalfördelning

Om $X \sim N(\mu, \sigma)$ så är

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

och om vi har ett stickprov $X_1, X_2, \cdots, X_n$ så är

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Ett stickprov $X_1, X_2, \cdots, X_n$ där varje $X_i \sim N(\mu, \sigma)$

Testa $H_0 : \mu = \mu_0$ på signifikansnivå α med

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \text{ (t-fördelning med } n-1 \text{ frihetsgrader)}$$

Förkasta H_0 om $|T| \geq t_{\alpha/2,n-1}$ då $H_a : \mu \neq \mu_0$

Förkasta H_0 om $T \geq t_{\alpha,n-1}$ då $H_a : \mu > \mu_0$

Förkasta H_0 om $T \leq -t_{\alpha,n-1}$ då $H_a : \mu < \mu_0$

Bilda ett tvåsidigt $100(1 - \alpha)\%$ konfidensintervall med

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n}$$

Om σ av någon anledning råkar vara känt, ersätt s med σ och använd $z_{\alpha/2}$ i st f $t_{\alpha/2,n-1}$

Om X_i inte är normalfördelad, men stickprovet stort kan vi anta att T ovan är approximativt standard normalfördelad.

Parade data $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$

där varje $D_i = X_i - Y_i \sim N(\delta, \sigma)$

Testa $H_0 : \delta = \delta_0$ (oftast $\delta_0 = 0$) genom att betrakta alla D_i som ett stickprov på differenser och följ anvisningar för ett stickprov.

$$T = \frac{\bar{x} - \delta_0}{s/\sqrt{n}}$$

Två stickprov $X_1, X_2, \cdots, X_m$ och $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$

Anta $X_i \sim N(\mu_1, \sigma)$ och $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma)$

Poola de två variansskattningarna s_1^2 och s_2^2 för X resp Y.

$$s_p^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

och testa $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ (oftast $\Delta_0 = 0$) på signifikansnivå α med

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{s_p\sqrt{1/m + 1/n}} \sim t_{n+m-2} \text{ (t-fördelning med } n+m-2 \text{ frihetsgrader)}$$

Förkasta H_0 om $|T| \geq t_{\alpha/2,n+m-2}$ då $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$

Förkasta H_0 om $T \geq t_{\alpha,n+m-2}$ då $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$

Förkasta H_0 om $T \leq -t_{\alpha,n+m-2}$ då $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$

Bilda ett tvåsidigt $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall med

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2,m+n-2}s_p\sqrt{1/m + 1/n}$$

ANOVA - Fler än två stickprov (k>2) Anta att de olika grupperna är normalfördelade $N(\mu_i, \sigma)$, dvs eventuellt olika medelvärden, men samma varians.

Man kan då testa

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

mot

$$H_a : \text{någon skillnad mellan medelvärdena}$$

med

$$F = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2}$$

där $\hat{\sigma}_W^2$ är den poolade variansen analogt med tvåstickprovsfallet och $\hat{\sigma}_B^2$ är en skattning av σ baserad på medelvärdena.

Förkasta H_0 för stora värden på teststatistikan

Test av samband mellan två kategoriska variabler

Samla antalen av varje kategoripar i en kontingenstabell med r rader och c kolumner

	1	$\cdots$	j	$\cdots$	c	
1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1c}	$n_{1.}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	n_{i1}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{ij}	$n_{i.}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
r	n_{r1}	$\cdots$	n_{rj}	$\cdots$	n_{rc}	$n_{r.}$
	$n_{.1}$	$\cdots$	$n_{.j}$	$\cdots$	$n_{.c}$	n

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{c} n_{ij} \text{ och } n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$$

Anta att följande sannolikheter gäller för cellerna och marginalerna

	1	$\cdots$	j	$\cdots$	c	
1	p_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	p_{1c}	$p_{1.}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{ij}	$p_{i.}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
r	p_{r1}	$\cdots$	p_{rj}	$\cdots$	p_{rc}	$p_{r.}$
	$p_{.1}$	$\cdots$	$p_{.j}$	$\cdots$	$p_{.c}$	1

Testa $H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ för alla par i, j (dvs oberoende) med

$$\chi^2 = \sum\sum \frac{(n_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

som är approximativt χ^2 fördelad med $(r-1)(c-1)$ frihetsgrader och där $\hat{e}_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.i}}{n}$. För att approximationen ska vara god bör $\hat{e}_{ij} \geq 5$ för minst 80% av cellerna.

Förkasta H_0 för stora värden på teststatistikan

Goodness of fit För att testa om en kategorisk variabel med k kategorier följer förutbestämda proportioner $p_1, p_2, \cdots, p_k$ används ett chi2-test.

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

som är approximativt χ^2 fördelad med $k-1$ frihetsgrader. För att approximationen ska vara god bör $np_i \geq 5$ för varje i. H_0 förkastas för stora värden på χ^2.
Regression Vid linjär regression med n observationspar (x_i, y_i) skattar man en linje mha modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

där $\epsilon \sim N(0, \sigma)$ är "bruset".

Skattningar får man genom

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Test av $H_0 : \beta_1 = 0$ testas med en teststatistika av typen

$$T = \frac{\hat{\beta}_1}{se(\hat{\beta}_1)}$$

som är t−fördelad med $n - 2$ frihetsgrader

Förklaringsgraden R^2 är den andel av variansen hos Y som förklaras av regressionsmodellen. I enkel linjär regression är $R^2 = r^2$, där r är Pearsons korrelationskoefficient.

Korrelation

Pearsons korrelationskoefficient r är ett mått mellan -1 och 1.

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}$$

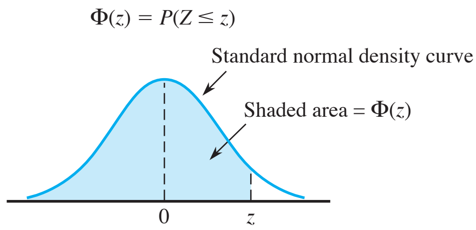
som skattar en motsvarande populationsstorhet ρ. Om X och Y är oberoende så är $\rho = 0$.

Man kan testa $H_0 : \rho = 0$ med

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

som är t−fördelad med $n - 2$ frihetsgrader och identisk med teststatistikan för $H_0 : \beta_1 = 0$ från regressionsanalysen.

Table A.3 Standard Normal Curve Areas



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0038
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

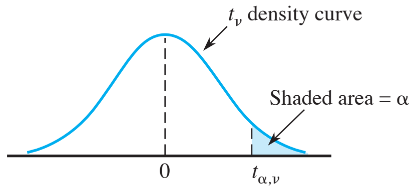
(continued)

Table A.3 Standard Normal Curve Areas *(cont.)*

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$

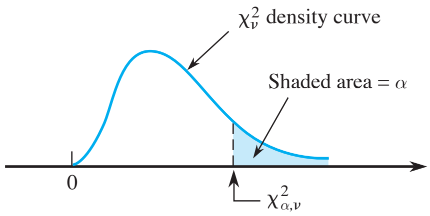
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table A.5 Critical Values for *t* Distributions



	α						
ν	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

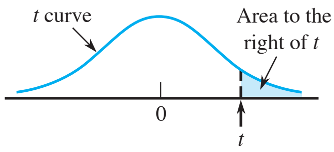
Table A.7 Critical Values for Chi-Squared Distributions



ν \ α	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.584	19.960	22.105	24.075	26.492	48.363	52.192	55.667	59.891	62.880
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.994	21.425	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.119	62.426	65.473
40	20.706	22.164	24.433	26.509	29.050	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

For $\nu > 40$, $\chi^2_{\alpha,\nu} \approx \nu\left(1 - \frac{2}{9\nu} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right)^3$

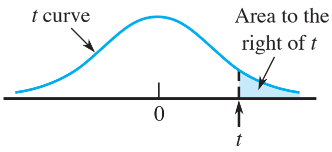
Table A.8 *t* Curve Tail Areas



t \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.468	.465	.463	.463	.462.	.462	.462	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461
0.2	.437	.430	.427	.426	.425	.424	.424	.423	.423	.423	.423	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422
0.3	.407	.396	.392	.390	.388	.387	.386	.386	.386	.385	.385	.385	.384	.384	.384	.384	.384	.384
0.4	.379	.364	.358	.355	.353	.352	.351	.350	.349	.349	.348	.348	.348	.347	.347	.347	.347	.347
0.5	.352	.333	.326	.322	.319	.317	.316	.315	.315	.314	.313	.313	.313	.312	.312	.312	.312	.312
0.6	.328	.305	.295	.290	.287	.285	.284	.283	.282	.281	.280	.280	.279	.279	.279	.278	.278	.278
0.7	.306	.278	.267	.261	.258	.255	.253	.252	.251	.250	.249	.249	.248	.247	.247	.247	.247	.246
0.8	.285	.254	.241	.234	.230	.227	.225	.223	.222	.221	.220	.220	.219	.218	.218	.218	.217	.217
0.9	.267	.232	.217	.210	.205	.201	.199	.197	.196	.195	.194	.193	.192	.191	.191	.191	.190	.190
1.0	.250	.211	.196	.187	.182	.178	.175	.173	.172	.170	.169	.169	.168	.167	.167	.166	.166	.165
1.1	.235	.193	.176	.167	.162	.157	.154	.152	.150	.149	.147	.146	.146	.144	.144	.144	.143	.143
1.2	.221	.177	.158	.148	.142	.138	.135	.132	.130	.129	.128	.127	.126	.124	.124	.124	.123	.123
1.3	.209	.162	.142	.132	.125	.121	.117	.115	.113	.111	.110	.109	.108	.107	.107	.106	.105	.105
1.4	.197	.148	.128	.117	.110	.106	.102	.100	.098	.096	.095	.093	.092	.091	.091	.090	.090	.089
1.5	.187	.136	.115	.104	.097	.092	.089	.086	.084	.082	.081	.080	.079	.077	.077	.077	.076	.075
1.6	.178	.125	.104	.092	.085	.080	.077	.074	.072	.070	.069	.068	.067	.065	.065	.065	.064	.064
1.7	.169	.116	.094	.082	.075	.070	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.055	.054	.054	.053
1.8	.161	.107	.085	.073	.066	.061	.057	.055	.053	.051	.050	.049	.048	.046	.046	.045	.045	.044
1.9	.154	.099	.077	.065	.058	.053	.050	.047	.045	.043	.042	.041	.040	.038	.038	.038	.037	.037
2.0	.148	.092	.070	.058	.051	.046	.043	.040	.038	.037	.035	.034	.033	.032	.032	.031	.031	.030
2.1	.141	.085	.063	.052	.045	.040	.037	.034	.033	.031	.030	.029	.028	.027	.027	.026	.025	.025
2.2	.136	.079	.058	.046	.040	.035	.032	.029	.028	.026	.025	.024	.023	.022	.022	.021	.021	.021
2.3	.131	.074	.052	.041	.035	.031	.027	.025	.023	.022	.021	.020	.019	.018	.018	.018	.017	.017
2.4	.126	.069	.048	.037	.031	.027	.024	.022	.020	.019	.018	.017	.016	.015	.015	.014	.014	.014
2.5	.121	.065	.044	.033	.027	.023	.020	.018	.017	.016	.015	.014	.013	.012	.012	.012	.011	.011
2.6	.117	.061	.040	.030	.024	.020	.018	.016	.014	.013	.012	.012	.011	.010	.010	.010	.009	.009
2.7	.113	.057	.037	.027	.021	.018	.015	.014	.012	.011	.010	.010	.009	.008	.008	.008	.008	.007
2.8	.109	.054	.034	.024	.019	.016	.013	.012	.010	.009	.009	.008	.008	.007	.007	.006	.006	.006
2.9	.106	.051	.031	.022	.017	.014	.011	.010	.009	.008	.007	.007	.006	.005	.005	.005	.005	.005
3.0	.102	.048	.029	.020	.015	.012	.010	.009	.007	.007	.006	.006	.005	.004	.004	.004	.004	.004
3.1	.099	.045	.027	.018	.013	.011	.009	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
3.2	.096	.043	.025	.016	.012	.009	.008	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.002
3.3	.094	.040	.023	.015	.011	.008	.007	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002
3.4	.091	.038	.021	.014	.010	.007	.006	.005	.004	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002
3.5	.089	.036	.020	.012	.009	.006	.005	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.6	.086	.035	.018	.011	.008	.006	.004	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.7	.084	.033	.017	.010	.007	.005	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.8	.082	.031	.016	.010	.006	.004	.003	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.9	.080	.030	.015	.009	.006	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
4.0	.078	.029	.014	.008	.005	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000

(continued)

Table A.8 *t* Curve Tail Areas *(cont.)*



t \ ν	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	60	120	$\infty (= z)$
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.460	.460	.460	.460	.460
0.2	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421
0.3	.384	.384	.384	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.382	.382
0.4	.347	.347	.347	.347	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.345	.345	.345
0.5	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.310	.310	.310	.310	.310	.309	.309	.309
0.6	.278	.278	.278	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.276	.276	.275	.275	.274
0.7	.246	.246	.246	.246	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.244	.244	.243	.243	.242
0.8	.217	.217	.216	.216	.216	.216	.216	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.214	.213	.213	.212
0.9	.190	.189	.189	.189	.189	.189	.188	.188	.188	.188	.188	.188	.187	.187	.186	.185	.184
1.0	.165	.165	.164	.164	.164	.164	.163	.163	.163	.163	.163	.163	.162	.162	.161	.160	.159
1.1	.143	.142	.142	.142	.141	.141	.141	.141	.141	.140	.140	.140	.139	.139	.138	.137	.136
1.2	.122	.122	.122	.121	.121	.121	.121	.120	.120	.120	.120	.120	.119	.119	.117	.116	.115
1.3	.105	.104	.104	.104	.103	.103	.103	.103	.102	.102	.102	.102	.101	.101	.099	.098	.097
1.4	.089	.089	.088	.088	.087	.087	.087	.087	.086	.086	.086	.086	.085	.085	.083	.082	.081
1.5	.075	.075	.074	.074	.074	.073	.073	.073	.073	.072	.072	.072	.071	.071	.069	.068	.067
1.6	.063	.063	.062	.062	.062	.061	.061	.061	.061	.060	.060	.060	.059	.059	.057	.056	.055
1.7	.053	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.051	.050	.050	.050	.050	.049	.048	.047	.046	.045
1.8	.044	.043	.043	.043	.042	.042	.042	.042	.042	.041	.041	.041	.040	.040	.038	.037	.036
1.9	.036	.036	.036	.035	.035	.035	.035	.034	.034	.034	.034	.034	.033	.032	.031	.030	.029
2.0	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028	.028	.027	.027	.027	.026	.025	.024	.023
2.1	.025	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.023	.023	.022	.022	.022	.022	.021	.020	.019	.018
2.2	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.018	.018	.018	.018	.018	.017	.017	.016	.015	.014
2.3	.016	.016	.016	.016	.015	.015	.015	.015	.015	.015	.014	.014	.014	.013	.012	.012	.011
2.4	.013	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.011	.011	.011	.010	.009	.008
2.5	.011	.011	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.009	.008	.008	.007	.006
2.6	.009	.009	.008	.008	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.006	.005	.005
2.7	.007	.007	.007	.007	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003
2.8	.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
2.9	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.002	.002
3.0	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.001
3.1	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.2	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.3	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000
3.4	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.5	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000
3.6	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3.7	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.8	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000